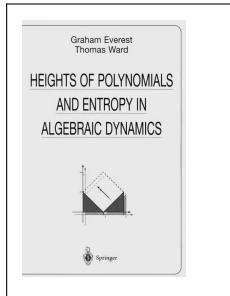


But the patient reader is well rewarded. For instance, one soon learns what projecting semi-algebraic sets to a coordinate axis has to do with preservation of properties, such as the number of connected components, under a field extension. This is of course important when adjoining infinitely small deformation parameters. Towards the end, the book becomes more like a research paper, providing algorithms with better complexity than those in use at the time of writing.

W. van der Kallen



G. Everest, T. Ward
Heights of polynomials and entropy in algebraic dynamics

Berlin: Springer Verlag, 1999

212 p., prijs € 67,36

ISBN 1-85233-125-9

The height of an algebraic number, a point of an algebraic variety, or a polynomial is an important notion in algebraic number theory and algebraic geometry. It is in one way or another a measure of complexity that has proved its value in these areas, viz. the ones that have classification numbers 11 and 14 in MSC2000.

A discrete time dynamical system is simply a map T of a compact metric space X into itself. If X is a compact topological group and T is a homomorphism, it is an algebraic dynamical system. One important number attached to a (discrete time) dynamical system is its entropy, a number that up to a point is classifying in the sense of dynamical system theory. This is area 37 in MSC2000.

At first sight it would seem exceedingly unlikely that there would be any relation at all between entropy and height. Reality is otherwise: they are very much intertwined, and this is what this unusual and very interesting book is about.

Let's give some detail for the simplest manifestation of this. The Mahler measure of a polynomial

$$F(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_d \prod_{i=1}^d (x - \alpha_i)$$

is

$$M(F) = |a_d| \prod_{i=1}^d \max \{1, |\alpha_i|\} .$$

Its logarithm $m(F)$ is also called Mahler measure.

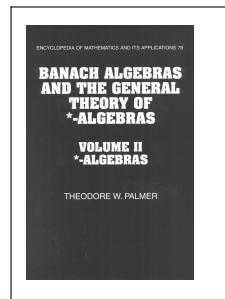
Now take an integral $n \times n$ matrix A and take the induced map T_A of the torus R^n / Z^n into itself. Then (see page 35 of the book under review): The topological entropy of the transformation T_A is equal to the (logarithmic) Mahler measure of the characteristic polynomial of the matrix A .

Such a thing cannot, of course, be just a coincidence. There is something very fundamental going on that is still not all that well understood. What has just been said is only the beginning of an absorbing (interspecialistic) area of research, which, in a way, started with the quest for large prime numbers (Lehmer, 1933). One aspect that takes much space in the present volume is the situation with polynomials in more than one variable. Here elliptic curves, those much loved objects from algebraic geometry, again

make a powerful appearance.

The authors write about all this with erudition and charm taking the excellent pedagogical principle of proving things mostly in the simpler cases only and not attempting full generality. They have included more than a hundred exercises, with hints, which range all the way upward to the highest level of open research problems such as something equivalent to proving that there are infinitely many Mersenne primes.

M. Hazewinkel



T.W. Palmer

Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras II

Encyclopedia of Mathematics and its Applications 49

Cambridge: Cambridge University Press, 2001

834 p., prijs £75,-

ISBN 0-521-36638-0

Dit is het tweede deel van een omvangrijk werk over Banach algebras en *-algebra's. Deel 1 kwam uit in 1994 en bedoelde te voorzien in "a gentle introduction to most of the research on general Banach algebras". Het vond een zeer gunstig onthaal in de *Mededelingen van het Wiskundig Genootschap*, september 1996. Hier wordt Deel 2 besproken dat werd gepubliceerd in 2001 en de theorie van *-algebra's — dat wil zeggen, complexe algebra's met involutie — bestrijkt. De pretentie is: een werk "including all known results on general Banach *-algebras". Het gebruik van het woord 'general' indiceert in dit verband dat geen uitputtende, systematische behandeling wordt geboden van C*-algebra's.

De twee boeken tellen samen zo'n 1600 pagina's, elk circa 800. Het totale werk is ingedeeld in 12 hoofdstukken en er is (in overeenstemming met de bovengenoemde pretentie) een indrukwekkende hoeveelheid materiaal bijeengebracht en verwerkt. Per saldo is mijn mening over dit boek — ruimer: deze twee boeken — dan ook positief, wat niet wegneemt dat er hier en daar aanleiding is voor een kritische kanttekening.

Hieronder volgt de bespreking van het tweede boek dat bestaat uit de Hoofdstukken genummerd 9 t/m 12. Ik houd het kort, zeker in verhouding tot de omvang van het werk.

Hoofdstuk 9, getiteld *-Algebras, behandelt de algebraïsche theorie van *-algebra's sec, dat wil zeggen zonder verdere a priori veronderstellingen. De voor de ontwikkeling van de theorie noodzakelijke operatorentheorie staat her en der verspreid in de tekst. Dit komt de overzichtelijkheid niet ten goede. Elders in het boek komen vergelijkbare, wat minder overzichtelijke, situaties voor.

Hoofdstuk 10, getiteld Special *-Algebras, is gewijd aan de studering van *-algebra's waaraan wel extra eisen zijn opgelegd: G*-algebra's, S*-algebra's, Sq*-algebra's, etc. Het heeft geen zin om al die onderscheidingen hier te benoemen (ten behoeve van een indruk: voor een Sq*-algebra geldt een zeker 'square root axiom'). Het lijkt er op alsof het de bedoeling is na te gaan hoe ver men kan komen zonder de (ultieme) eis 'Banach *-algebra' die in Hoofdstuk 11 wordt gesteld. De auteur zelf noemt Hoofdstuk 10 "the heart of this volume". Of het bij anderen dan de echte specialist (bijvoorbeeld graduate students) warme gevoelens voor het onderwerp zal opwekken durf ik niet zomaar aan te nemen.